Workshop 10

Spieltheorie
Anwendungen in Wirtschaft und Politik

Prof. Dr. Marco Sahm
Otto-Friedrich-Universität Bamberg

41. Wirtschaftsphilologentagung
Bayreuth, 30.09.2022

Übersicht

1. Was ist ein Spiel?

Ein Klassenzimmer-Experiment

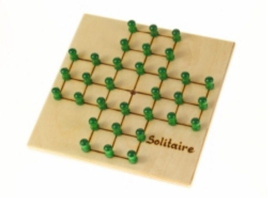
Der Beauty-Contest

- Bitte schreiben Sie
  - Ihren Namen und
  - eine (reelle) Zahl zwischen (einschließlich) 0 und 100

  auf einen Zettel, falten ihn und geben ihn mir.
- Sieger ist, wer mit seiner Zahl am nähesten an der Hälfte des Durchschnitts aller aufgeschriebenen Zahlen liegt.
- Gibt es mehrere Sieger, entscheidet das Los über den Gewinner.
- Der Gewinner erhält ein Kästchen mit Gold. Alle anderen gehen leer aus.

Charakteristische Eigenschaften eines Spiels

- *Mehrere Entscheidungsträger*: Spiel- vs. Entscheidungstheorie (Rätsel)
- *Interdependente Entscheidungen*: Ergebnis- und Prozesswirksamkeit (Common Knowledge)



Die drei Elemente eines Spiels

1. Wer ist beteiligt?
   $\longrightarrow$ Spieler
   $I = \{\text{Inge, Ludwig, Manfred}, \ldots\} = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$
2. Wie lauten die Regeln?
   $\longrightarrow$ Handlungsalternativen, Strategien
   $S_i = [0, 100]$ für alle $i \in I$
3. Wer gewinnt was?
   $\longrightarrow$ Strategienabhängige Auszahlungen

$$\pi_i(s) = \begin{cases} \frac{R}{|M|} & \text{wenn} \quad i \in M = \arg\min_{j \in I}\{|s_j - \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{2n}|\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die formale Definition eines Spiels

Ein **Spiel in Normalform** ist eine Liste $\Gamma = \{I, (S^i)_{i \in I}, (\pi^i)_{i \in I}\}$ aus

1. einer Menge I an Spielern i,
2. einer Menge S^i an Strategien s^i für jeden Spieler $i \in I$,
3. einer Auszahlungsfunktion π^i für jeden Spieler $i \in I$, welche jeder möglichen Kombination von Strategien der Spieler $s = (s^i)_{i \in I}$ die Auszahlung $\pi^i(s)$ von Spieler $i \in I$ zuordnet.

Bemerkung: Die Strategie s^i eines Spielers $i \in I$ kann aus mehreren einzelnen Aktionen bestehen (z.B. Züge beim Schachspiel). Sie stellt insofern einen vollständigen Plan durch das Spiel dar, als dass sie für alle in möglichen Spielverläufen eventuell zu treffenden Entscheidungen des Spielers i eine Aktion spezifiziert.

Frage: Wie verhalten sich die Spieler?

2. Dominante Strategien

Das Gefangenen-Dilemma

Zwei Gefangene werden verdächtigt, gemeinsam ein Verbrechen begangen zu haben, und in unterschiedlichen Räumen verhört. Jedem der beiden wird Folgendes zugesichert: Für den Fall, dass er gesteht, während der Komplize leugnet, wird er freigelassen. Wenn er leugnet, während der Komplize gesteht, wird er zu drei Jahren Gefängnis verurteilt. Gestehen beide, erhalten beide eine Strafe von zwei Jahren. Gesteht keiner von beiden, erhalten beide eine Strafe von einem Jahr.

		Gefangener 2	
		gestehen	leugnen
Gefangener 1	gestehen	-2 -2	0 -3
	leugnen	-3 0	-1 -1

Tabelle: Gefangenen-Dilemma

Welche Strategien verfolgen die Spieler im Gefangenen-Dilemma?

Gefangener 2

		gestehen		leugnen	
Gefangener 1	gestehen	-2	-2	0	-3
	leugnen	-3	0	-1	-1

Wenn Gefangener 2 gesteht, ist es für Gefangenen 1 besser zu gestehen. Wenn Gefangener 2 leugnet, ist es für Gefangenen 1 ebenfalls besser zu gestehen. Somit ist es für Gefangenen 1 unabhängig von der Strategie des Gefangenen 2 besser zu gestehen.

Aus Gründen der Symmetrie gilt Gleiches auch für Gefangenen 2. Folglich werden beide Gefangene gestehen und mit zwei Jahren Gefängnis bestraft.

Definitionen

Eine Strategie $\tilde{s}^i \in S^i$ heißt **dominante Strategie** für Spieler $i \in I$, wenn sie für jede Strategien-Kombination der übrigen Spieler seine Auszahlungsfunktion maximiert,
d.h. wenn für jede Wahl $s^{-i} \in S^{-i}$ gilt, dass

$$\pi^i(\tilde{s}^i, s^{-i}) \geq \pi^i(s^i, s^{-i}) \quad \text{für alle} \quad s^i \in S^i.$$

Eine Strategien-Kombination $s = (s^i)_{i \in I}$ heißt **Gleichgewicht in dominanten Strategien**, wenn s^i für jeden Spieler $i \in I$ eine dominante Strategie darstellt.
Beispiel. Im Gefangenen-Dilemma ist es für jeden der beiden Spieler eine dominante Strategie, zu gestehen. Mithin ist die Kombination (gestehen, gestehen) ein Gleichgewicht in dominanten Strategien.

Bemerkungen:

1. Als Lösungskonzept ist das Gleichgewicht in dominanten Strategien robust (schwache Anforderungen an Informiertheit und Rationalität der Spieler).
2. Das Beispiel des Gefangenen-Dilemmas illustriert den Konflikt zwischen individuellen und kollektiven Interessen sowie den nicht-kooperativen Charakter des Gleichgewichts in dominanten Strategien als Lösungskonzept.
3. Zahlreiche Anwendungen: Trittbrettfahrer-Problem bei öffentlichen Gütern, unvollständige Konkurrenz
4. (Wie) kann Kooperation trotzdem gelingen (video)?

Frage: Besitzt jedes Spiel ein Gleichgewicht in dominanten Strategien?

3. Nash-Gleichgewichte

Kampf der Geschlechter

Beispiel. Folgendes Spiel ist unter dem Namen *Kampf der Geschlechter* bekannt.

		Mann			
		Ballett		Fußball	
Frau	Ballett	2	1	0	0
	Fußball	0	0	1	2

Tabelle: Kampf der Geschlechter

Kein Spieler besitzt eine dominante Strategie. Es gilt jedoch: Wählt Frau Ballett, ist es für Mann am besten, auch Ballett zu wählen und umgekehrt: Wählt Mann Ballett, ist es für Frau am besten, auch Ballett zu wählen. Niemand hat also ein Interesse daran, einseitig von der Strategien-Kombination (Ballett, Ballett) abzuweichen. Die Situation ist in diesem Sinne stabil.

Kampf der Geschlechter

Beispiel. Folgendes Spiel ist unter dem Namen *Kampf der Geschlechter* bekannt.

		Mann			
		Ballett		Fußball	
Frau	**Ballett**	2	**1**	0	**0**
	Fußball	0	0	1	2

Tabelle: Kampf der Geschlechter

Kein Spieler besitzt eine dominante Strategie. Es gilt jedoch: Wählt Frau Ballett, ist es für Mann am besten, auch Ballett zu wählen und umgekehrt: Wählt Mann Ballett, ist es für Frau am besten, auch Ballett zu wählen. Niemand hat also ein Interesse daran, einseitig von der Strategien-Kombination (Ballett, Ballett) abzuweichen. Die Situation ist in diesem Sinne stabil.

Kampf der Geschlechter

Beispiel. Folgendes Spiel ist unter dem Namen *Kampf der Geschlechter* bekannt.

Mann

		Ballett		Fußball	
Frau	**Ballett**	2	**1**	0	0
	Fußball	0	0	1	2

Tabelle: Kampf der Geschlechter

Kein Spieler besitzt eine dominante Strategie. Es gilt jedoch: Wählt Frau Ballett, ist es für Mann am besten, auch Ballett zu wählen und umgekehrt: Wählt Mann Ballett, ist es für Frau am besten, auch Ballett zu wählen. Niemand hat also ein Interesse daran, einseitig von der Strategien-Kombination (Ballett, Ballett) abzuweichen. Die Situation ist in diesem Sinne stabil.

Kampf der Geschlechter

Beispiel. Folgendes Spiel ist unter dem Namen *Kampf der Geschlechter* bekannt.

		Mann			
		Ballett		Fußball	
Frau	Ballett	**2**	**1**	0	0
	Fußball	**0**	0	1	2

Tabelle: Kampf der Geschlechter

Kein Spieler besitzt eine dominante Strategie. Es gilt jedoch: Wählt Frau Ballett, ist es für Mann am besten, auch Ballett zu wählen und umgekehrt: Wählt Mann Ballett, ist es für Frau am besten, auch Ballett zu wählen. Niemand hat also ein Interesse daran, einseitig von der Strategien-Kombination (Ballett, Ballett) abzuweichen. Die Situation ist in diesem Sinne stabil.

Kampf der Geschlechter

Beispiel. Folgendes Spiel ist unter dem Namen *Kampf der Geschlechter* bekannt.

		Mann			
		Ballett		Fußball	
Frau	Ballett	**2**	**1**	0	0
	Fußball	0	0	1	2

Tabelle: Kampf der Geschlechter

Kein Spieler besitzt eine dominante Strategie. Es gilt jedoch: Wählt Frau Ballett, ist es für Mann am besten, auch Ballett zu wählen und umgekehrt: Wählt Mann Ballett, ist es für Frau am besten, auch Ballett zu wählen. Niemand hat also ein Interesse daran, einseitig von der Strategien-Kombination (Ballett, Ballett) abzuweichen. Die Situation ist in diesem Sinne stabil.

Kampf der Geschlechter

Beispiel. Folgendes Spiel ist unter dem Namen *Kampf der Geschlechter* bekannt.

		Mann			
		Ballett		Fußball	
Frau	Ballett	**2**	**1**	0	0
	Fußball	0	0	1	2

Tabelle: Kampf der Geschlechter

Kein Spieler besitzt eine dominante Strategie. Es gilt jedoch: Wählt Frau Ballett, ist es für Mann am besten, auch Ballett zu wählen und umgekehrt: Wählt Mann Ballett, ist es für Frau am besten, auch Ballett zu wählen. Niemand hat also ein Interesse daran, einseitig von der Strategien-Kombination (Ballett, Ballett) abzuweichen. Die Situation ist in diesem Sinne stabil.

Nash's Idee

- Eine Situation ist stabil, d.h. ein Gleichgewicht, wenn kein Spieler einen Anreiz besitzt, einseitig von der gewählten Strategien-Kombination abzuweichen.
- Ein bestimmter Spieler $i \in I$ hat keinen Anreiz, einseitig von der gewählten Strategien-Kombination abzuweichen, wenn die von ihm gewählte Strategie eine beste Antwort auf die von den übrigen Spielern gewählte Strategien-Kombination darstellt (also seine Auszahlung für die von den übrigen Spielern gewählte Strategien-Kombination maximiert).
- Folglich ist eine Kombination wechselseitig bester Antworten ein Gleichgewicht.

Definition des Nash Gleichgewichts

Eine Strategien-Kombination $\hat{s} = (\hat{s}^i)_{i \in I}$ heißt **Nash-Gleichgewicht**, wenn die Strategie $\hat{s}^i$ für jeden Spieler $i \in I$ seine Auszahlungsfunktion unter der Bedingung maximiert, dass die übrigen Spieler die Strategien-Kombination $\hat{s}^{-i}$ verfolgen, d.h. wenn für alle $i \in I$ gilt, dass

$$\pi^i(\hat{s}^i, \hat{s}^{-i}) \geq \pi^i(s^i, \hat{s}^{-i}) \quad \text{für alle} \quad s^i \in S^i.$$

Beispiel. Im Kampf der Geschlechter stellt die Strategien-Kombination

- (Ballett, Ballett) ein Nash-Gleichgewicht dar (s.o.),
- (Fußball, Fußball) ebenfalls ein Nash-Gleichgewicht dar.

Mann

		Ballett	Fußball
Frau	Ballett	2 1	0 0
	Fußball	0 0	1 2

Definition des Nash Gleichgewichts

Eine Strategien-Kombination $\hat{s} = (\hat{s}^i)_{i \in I}$ heißt **Nash-Gleichgewicht**, wenn die Strategie $\hat{s}^i$ für jeden Spieler $i \in I$ seine Auszahlungsfunktion unter der Bedingung maximiert, dass die übrigen Spieler die Strategien-Kombination $\hat{s}^{-i}$ verfolgen, d.h. wenn für alle $i \in I$ gilt, dass

$$\pi^i(\hat{s}^i, \hat{s}^{-i}) \geq \pi^i(s^i, \hat{s}^{-i}) \quad \text{für alle} \quad s^i \in S^i.$$

Beispiel. Im Kampf der Geschlechter stellt die Strategien-Kombination

- (Ballett, Ballett) ein Nash-Gleichgewicht dar (s.o.),
- (Fußball, Fußball) ebenfalls ein Nash-Gleichgewicht dar.

Mann

		Ballett		Fußball	
Frau	Ballett	2	1	0	0
	Fußball	0	**0**	1	**2**

Definition des Nash Gleichgewichts

Eine Strategien-Kombination $\hat{s} = (\hat{s}^i)_{i \in I}$ heißt **Nash-Gleichgewicht**, wenn die Strategie $\hat{s}^i$ für jeden Spieler $i \in I$ seine Auszahlungsfunktion unter der Bedingung maximiert, dass die übrigen Spieler die Strategien-Kombination $\hat{s}^{-i}$ verfolgen, d.h. wenn für alle $i \in I$ gilt, dass

$$\pi^i(\hat{s}^i, \hat{s}^{-i}) \geq \pi^i(s^i, \hat{s}^{-i}) \quad \text{für alle} \quad s^i \in S^i.$$

Beispiel. Im Kampf der Geschlechter stellt die Strategien-Kombination

- (Ballett, Ballett) ein Nash-Gleichgewicht dar (s.o.),
- (Fußball, Fußball) ebenfalls ein Nash-Gleichgewicht dar.

		Mann			
		Ballett		Fußball	
Frau	Ballett	2	1	0	0
	Fußball	0	0	1	**2**

Definition des Nash Gleichgewichts

Eine Strategien-Kombination $\hat{s} = (\hat{s}^i)_{i \in I}$ heißt **Nash-Gleichgewicht**, wenn die Strategie $\hat{s}^i$ für jeden Spieler $i \in I$ seine Auszahlungsfunktion unter der Bedingung maximiert, dass die übrigen Spieler die Strategien-Kombination $\hat{s}^{-i}$ verfolgen,
d.h. wenn für alle $i \in I$ gilt, dass

$$\pi^i(\hat{s}^i, \hat{s}^{-i}) \geq \pi^i(s^i, \hat{s}^{-i}) \quad \text{für alle} \quad s^i \in S^i.$$

Beispiel. Im Kampf der Geschlechter stellt die Strategien-Kombination

- (Ballett, Ballett) ein Nash-Gleichgewicht dar (s.o.),
- (Fußball, Fußball) ebenfalls ein Nash-Gleichgewicht dar.

		Mann	
		Ballett	**Fußball**
Frau	Ballett	2 1	**0** 0
	Fußball	0 0	**1** **2**

Definition des Nash Gleichgewichts

Eine Strategien-Kombination $\hat{s} = (\hat{s}^i)_{i \in I}$ heißt **Nash-Gleichgewicht**, wenn die Strategie $\hat{s}^i$ für jeden Spieler $i \in I$ seine Auszahlungsfunktion unter der Bedingung maximiert, dass die übrigen Spieler die Strategien-Kombination $\hat{s}^{-i}$ verfolgen, d.h. wenn für alle $i \in I$ gilt, dass

$$\pi^i(\hat{s}^i, \hat{s}^{-i}) \geq \pi^i(s^i, \hat{s}^{-i}) \quad \text{für alle} \quad s^i \in S^i.$$

Beispiel. Im Kampf der Geschlechter stellt die Strategien-Kombination

- (Ballett, Ballett) ein Nash-Gleichgewicht dar (s.o.),
- (Fußball, Fußball) ebenfalls ein Nash-Gleichgewicht dar.

Mann

Frau	Ballett		**Fußball**	
Ballett	2	1	0	0
Fußball	0	0	**1**	**2**

Definition des Nash Gleichgewichts

Eine Strategien-Kombination $\hat{s} = (\hat{s}^i)_{i \in I}$ heißt **Nash-Gleichgewicht**, wenn die Strategie $\hat{s}^i$ für jeden Spieler $i \in I$ seine Auszahlungsfunktion unter der Bedingung maximiert, dass die übrigen Spieler die Strategien-Kombination $\hat{s}^{-i}$ verfolgen,
d.h. wenn für alle $i \in I$ gilt, dass

$$\pi^i(\hat{s}^i, \hat{s}^{-i}) \geq \pi^i(s^i, \hat{s}^{-i}) \quad \text{für alle} \quad s^i \in S^i.$$

Beispiel. Im Kampf der Geschlechter stellt die Strategien-Kombination

- (Ballett, Ballett) ein Nash-Gleichgewicht dar (s.o.),
- (Fußball, Fußball) ebenfalls ein Nash-Gleichgewicht dar.

		Mann			
		Ballett		Fußball	
Frau	Ballett	2	1	0	0
	Fußball	0	0	**1**	**2**

Bemerkungen:

1. Erwartet ein Spieler, dass alle anderen Spieler sich an ihre Nash-Strategien halten, ist es auch für ihn am besten, sich an seine Nash-Strategie zu halten. Dem Konzept des Nash-Gleichgewichts liegt also die Annahme wechselseitig korrekter Erwartungen zugrunde.
2. Ein Gleichgewicht in dominanten Strategien ist gleichzeitig auch ein Nash-Gleichgewicht (*Beispiel:* Gefangenen-Dilemma).

   Die Umkehrung gilt jedoch nicht (*Beispiel:* Kampf der Geschlechter).

   Das Nash-Gleichgewicht ist also ein schwächeres Lösungskonzept als das Gleichgewicht in dominanten Strategien (stärkere Annahmen an die Informiertheit und Rationalität der Spieler).

3. Inwieweit ist zu erwarten, dass die Spieler ein Nash-Gleichgewicht spielen?
    - Ergebnis einer rationalen Analyse des Spiels
    - Folgen einer Konvention oder eines Vorschlags von außen
    - Kommunikation vor dem Spiel
    - Lernen durch Versuch und Irrtum.
    - Abweichungen bei eingeschränkter Rationalität

4. Ein Spiel kann
    - ein eindeutiges Nash-Gleichgewicht besitzen (*Beispiel:* Gefangenen-Dilemma, Schönheitswettbewerb),
    - mehrere Nash-Gleichgewichte besitzen (*Beispiel:* Kampf der Geschlechter) $\longrightarrow$ Koordinationsproblem
    - oder kein Nash-Gleichgewicht (in reinen Strategien) besitzen. *Beispiel:*

		Mann			
		Ballett		Fußball	
Frau	Ballett	0	1	2	0
	Fußball	1	0	0	2

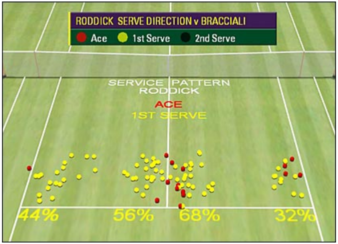
Tabelle: Kampf der Geschlechter nach 30 Jahren Ehe

Frage: Wie können Spieler unberechenbar bleiben?

4. Gemischte Strategien

Der Wunsch nach Randomisierung

Beispiele: Elfmeterschießen, Aufschlag beim Tennis



Elfmeterschießen

Formale Beschreibung und Analyse

- *Spieler:* Torwart (Zeile, 1. Eintrag), Schütze (Spalte, 2. Eintrag)
- *Strategien:* “links”, “rechts” (von der Spielfeldmitte aus)
- *Auszahlungen:*

	links	rechts
links	1, -1	-1, 1
rechts	-1, 1	1, -1

Elfmeterschießen

Formale Beschreibung und Analyse

- *Spieler:* Torwart (Zeile, 1. Eintrag), Schütze (Spalte, 2. Eintrag)
- *Strategien:* “links”, “rechts” (von der Spielfeldmitte aus)
- *Auszahlungen:*

	links	rechts
links	**1**, -1	-1, 1
rechts	-**1**, 1	1, -1

- schießt der Schütze nach links, sollte der Torwart auch nach links springen.

Elfmeterschießen

Formale Beschreibung und Analyse

- *Spieler:* Torwart (Zeile, 1. Eintrag), Schütze (Spalte, 2. Eintrag)
- *Strategien:* “links”, “rechts” (von der Spielfeldmitte aus)
- *Auszahlungen:*

	links	rechts
links	**1**, -1	-1, 1
rechts	-1, 1	1, -1

- schießt der Schütze nach links, sollte der Torwart auch nach links springen.

Elfmeterschießen

Formale Beschreibung und Analyse

- *Spieler:* Torwart (Zeile, 1. Eintrag), Schütze (Spalte, 2. Eintrag)
- *Strategien:* “links”, “rechts” (von der Spielfeldmitte aus)
- *Auszahlungen:*

	links	**rechts**
links	**1**, -1	-**1**, 1
rechts	-1, 1	**1**, -1

- schießt der Schütze nach links, sollte der Torwart auch nach links springen.
- schießt der Schütze nach rechts, sollte der Torwart auch nach rechts springen.

Elfmeterschießen

Formale Beschreibung und Analyse

- *Spieler:* Torwart (Zeile, 1. Eintrag), Schütze (Spalte, 2. Eintrag)
- *Strategien:* “links”, “rechts” (von der Spielfeldmitte aus)
- *Auszahlungen:*

	links	**rechts**
links	**1**, -1	-1, 1
rechts	-1, 1	**1**, -1

- schießt der Schütze nach links, sollte der Torwart auch nach links springen.
- schießt der Schütze nach rechts, sollte der Torwart auch nach rechts springen.

Elfmeterschießen

Formale Beschreibung und Analyse

- *Spieler:* Torwart (Zeile, 1. Eintrag), Schütze (Spalte, 2. Eintrag)
- *Strategien:* “links”, “rechts” (von der Spielfeldmitte aus)
- *Auszahlungen:*

	links	rechts
links	**1**, -1	-1, **1**
rechts	-1, **1**	**1**, -1

- schießt der Schütze nach links, sollte der Torwart auch nach links springen.
- schießt der Schütze nach rechts, sollte der Torwart auch nach rechts springen.
- Der Schütze möchte aber gerade in die Ecke schießen, in die der Towart **nicht** springt.

- Ergebnis: Es gibt keine Kombination wechselseitig bester Antworten, d.h. kein Nash Gleichgewicht in *reinen Strategien*.
- Aber: Wie verhalten sich Schütze und Torwart?
- Idee: Die Spieler entscheiden sich zufällig für eine Handlungsoption.

- Nehmen Sie an, der *Schütze* schießt in 50% der Fälle nach rechts und in 50% der Fälle nach links (bspw. wirft der Schütze vorab eine faire Münze).

- Nehmen Sie an, der *Schütze* schießt in 50% der Fälle nach rechts und in 50% der Fälle nach links (bspw. wirft der Schütze vorab eine faire Münze).
- Dann ist der *Torwart* indifferent zwischen rechts und links. Insbesondere ist es (auch) eine beste Antwort, in 50% der Fälle nach links zu springen und in 50% der Fälle nach rechts zu springen.

- Nehmen Sie an, der *Schütze* schießt in 50% der Fälle nach rechts und in 50% der Fälle nach links (bspw. wirft der Schütze vorab eine faire Münze).
- Dann ist der *Torwart* indifferent zwischen rechts und links. Insbesondere ist es (auch) eine beste Antwort, in 50% der Fälle nach links zu springen und in 50% der Fälle nach rechts zu springen.
- Nehmen Sie an, der *Torwart* springt in 50% der Fälle nach rechts und in 50% der Fälle nach links.

- Nehmen Sie an, der *Schütze* schießt in 50% der Fälle nach rechts und in 50% der Fälle nach links (bspw. wirft der Schütze vorab eine faire Münze).
- Dann ist der *Torwart* indifferent zwischen rechts und links. Insbesondere ist es (auch) eine beste Antwort, in 50% der Fälle nach links zu springen und in 50% der Fälle nach rechts zu springen.
- Nehmen Sie an, der *Torwart* springt in 50% der Fälle nach rechts und in 50% der Fälle nach links.
- Dann ist der *Schütze* indifferent zwischen rechts und links. Insbesondere ist es (auch) eine beste Antwort, in 50% der Fälle nach links zu schießen und in 50% der Fälle nach rechts zu schießen.

- In 50% der Fälle nach links zu schießen bzw. zu springen und in 50% der Fälle nach rechts zu schießen bzw. zu springen ist also eine Stratgienkombination wechselseitig bester Antworten – *ein Nash Gleichgewicht*.
- In diesem Nash-Gleichgewicht sind beide Spieler indifferent zwischen ihren beiden Handlungsoptionen, die sie mit positiver Wahrscheinlichkeit verwenden.

Gemischte und reine Strategien

- Eine Strategie, bei der ein Spieler unterschiedliche Handlungsoptionen (z.B. “rechts” oder “links”) mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auswählt (indem er z.B. eine Münze wirft und bei Kopf oder Zahl unterschiedlich spielt) – also Handlungsoptionen mischt – heisst **gemischte Strategie**.
- Jede **reine Strategie**, wie etwa *immer* “links”, kann als eine spezielle gemischte Strategie interpretiert werden: Der Spieler spielt “links” mit Wahrscheinlichkeit 1.
- Obiges Beispiel illustriert: Ein **Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien** ist dadurch charakterisiert, dass alle Spieler indifferent zwischen allen ihren reinen Strategien sind, die sie mit positiver Wahrscheinlichkeit verwenden.
- *Nash (1950): Jedes Spiel (welches z.B. in Normalform darstellbar ist) hat mindestens ein Nash-Gleichgewicht.*

Anwendung

Falken, Tauben und der Kalte Krieg

		Spieler 2			
		Hawk		Dove	
Spieler 1	Hawk	–X	–X	V=2	L=0
	Dove	L=0	V=2	T=1	T=1

Bemerkungen:

- $X > 0$ bezeichnet die Höhe des Schadens im Desaster.
- Die beiden Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien (Hwak, Dove) und (Dove, Hawk) sind asymmetrisch.
- Da das Spiel symmetrisch ist, gibt es auch noch ein symmetrisches Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien $\sigma_1 = \sigma_2 = (p, 1 - p)$, wobei p die Wahrscheinlichkeit für Hawk bezeichnet.

Ermittlung des symmetrischen Nash-Gleichgewichts: Damit Spieler 2 zwischen Hawk und Dove indifferent ist, muss

$$p \cdot (-X) + (1-p) \cdot 2 = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{1+X}$$

gelten.

Gleichgewichtsanalyse:

- Die Desaster-Wahrscheinlichkeit beträgt

  $$\mathrm{Prob}(\mathrm{Hawk},\ \mathrm{Hawk}) = p^2 = \left(\frac{1}{1+X}\right)^2$$

  und nimmt mit der Höhe des Schadens X ab.
- Der Erwartungsnutzen beträgt

  $$u_i = -p^2 X + 2p(1-p) + (1-p)^2 = \frac{X^2 - X}{X^2 + 2X + 1} < 1,$$

  wächst in X und strebt für große Schadenshöhe gegen 1.

5. Sequentielle Entscheidungen

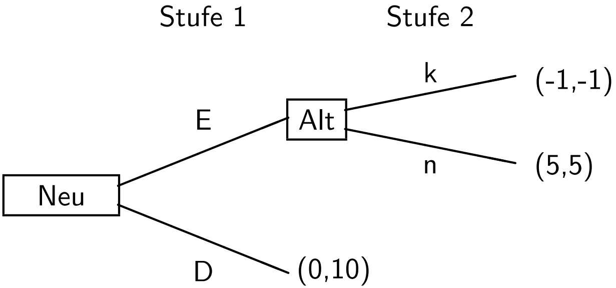
Simultane vs. sequentielle Entscheidungen

- Bislang wurden nur Spiele betrachtet, in denen die Entscheidungen gleichzeitig (simultan) getroffen werden.
- In vielen Spielen (wie z.B. Dame, Mühle, Schach) werden die Entscheidungen jedoch nacheinander (sequentiell) getroffen.
- Wie kann man die zeitliche Struktur eines Spiels abbilden und bei der Analyse berücksichtigen?

Abbildung durch Spielbäume

Beispiel: Ein Markteintrittsspiel

- Der *Herausforderer* (Neu) entscheidet zunächst, ob er eintritt (E) oder draußen bleibt (D).
- Der *Platzhirsch* (Alt) entscheidet im Falle des Marktzutritts, ob er kämpft (k) und einen Preiskrieg führt oder nicht kämpft (n) und sich den Markt mit dem anderen Unternehmen teilt.



- Die Reihenfolge der Entscheidungen kann man in der extensiven Form eines Spiels mit Hilfe eines Spielbaums abbilden.
- Im Markteintrittsspiel gibt es zwei Nash-Gleichgewichte: (E,n) und (D,k).
- Sind beide Nash-Gleichgewichte gleichermaßen plausibel?
- Es ist nicht glaubwürdig, dass der Platzhirsche wirklich kämpft, wenn der Eintritt erst einmal erfolgt ist.
- Das Nash-Gleichgewicht (D,k) ist somit keine plausible Verhaltensprognose.
- Wie lassen sich solche unglaubwürdigen Drohungen herausfiltern, um zu plausiblen Vorhersagen zu kommen?

Analyse per Rückwärtsinduktion

Algorithmus zum Auffinden plausibler Nash-Gleichgewichte:

- Suche die Nash-Gleichgewichte auf der letzten Stufe des Spiels.
- Suche die Nash-Gleichgewichte auf der vorletzten Stufes des Spiels, unter der Bedingung dass auf der letzten Stufe des Spiels die Aktionen gewählt werden, die zu den zuvor bestimmten Nash-Gleichgewichten führen.
- Verfolge dieses Verfahren sukzessive rückwärts durch den Spielbaum bis der Startpunkt erreicht ist.

Anwendung im Markteintrittsspiel:

- Auf Stufe 2 (also nach Markteintritt) ist es für den Platzhirschen besser, nicht zu kämpfen.
- Antizipiert die neue Firma dies, ist es auf Stufe 1 für sie besser, einzutreten.
- Somit ist nur das Nash-Gleichgewicht (E,n) eine plausible Vorhersage.

Ein Klassenzimmer-Experiment

Das Piratenproblem

- Fünf Piraten unterschiedlichen Alters entscheiden gemäß folgenden Regeln über die Aufteilung ihrer Beute von 16 Goldkugeln:
- Der älteste schlägt eine Aufteilung vor, über deren Akzeptanz von allen Piraten abgestimmt wird.
- Im Falle von Stimmengleichheit entscheidet die Stimme des Vorschlagenden.
- Wird der Vorschlag angenommen, wird er umgesetzt.
- Wird er abgelehnt, geht der Vorschlagende über Bord und das Vorschlagsrecht wechselt zum ältesten der verbleibenden Piraten.
- Diese Prozedur wird solange fortgesetzt, bis ein Vorschlag angenommen wird.

- Jeder Pirat maximiert die ihm zufallende Menge an Gold, schätzt dabei jedoch sein Leben höher als jede Menge an Gold.
- Außerdem bereitet es ihm Freude, andere Piraten über Bord zu werfen, solange sich dadurch nicht die ihm zufallende Menge an Gold verringert.
- Wie geht dieses Spiel aus, wenn sich alle Piraten rational verhalten und an die Regeln halten?

Theorie vs. Empirie

- Rückwärtsinduktion liefert eine theoretische Vorhersage.
- Das experimentelle Ergebnis weicht oft stark davon ab.
- Gründe für diese Diskrepanz:
  - beschränkte Rationalität (z.B. Unerfahrenheit),
  - soziale Präferenzen (z.B. Fairness, Neid),
  - allgemein: verhaltensökonomische Aspekte.

Zusammmenfassung und Ausblick

Spieltheorie ermöglicht es,

- mit Hilfe mathematischer Modelle strategisch interdependente Entscheidungen abzubilden und
- mit Hilfe unterschiedlicher Gleichgewichtskonzepte strategisches Verhalten vorherzusagen.

Da bei den meisten wirtschaftlichen und politischen Entscheidungen strategische Interdependenzen eine Rolle spielen, gehört die Spieltheorie zu einem der wichtigsten Instrumente der modernen Wirtschafts- und Politikwissenschaft für die Analyse zahlreicher Phänomene:

- unvollständiger Wettbewerb
- Design von Auktionen
- Gestaltung von Verträgen
- Ausgestaltung von Institutionen

Didaktische Hinweise

Das Thema Spieltheorie eignet sich für

- fächerübergreifenden Unterricht:
  - Wirtschaft & Recht,
  - Politik und Geschichte (z.B. Kalter Krieg, Wettrüsten),
  - Mathematik (formale Beschreibung, W-Theorie)
- Experimente im Klassenzimmer
  - reale Anreize setzen (Süßigkeiten, Hausaufgabenbefreiung)
  - Ergebnisse sichern (dokumentieren, archivieren)